dans chaque $H^2(\Omega_j)$. Soit K un compact de Ω, $K \subset\subset \Omega_j$, de la formule de la moyenne utilisée en II.2°/, on en déduit que $f_n \longrightarrow f$ localement uniformément sur K et une extraction de sous-recouvrement prouve que la convergence est uniforme sur K. D'où l'identité de ces deux topologies métriques.

▶ 3°/ On a, notant par L_∞ la composante connexe non bornée, $L^\star = L \cup S^2 \setminus (L \cup L_\infty)$; $S^2 \setminus (L \cup L_\infty)$ est un fermé (composantes connexes !) borné donc compact et $L^\star$ est compact.

▶ 4°/ Si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ n'a pas de composante connexe, compacte, π(cf. III) est connexe d'où la densité des polynômes dans $H_o^2(\Omega_j)$ puis dans $H(\Omega)$ (IV.2).

Année 1969

FONCTIONS ENTIÈRES DE TYPE EXPONENTIEL

ÉNONCÉ

Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies; en particulier les abréviations abusives risquent de ne pas être comprises. Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé.

C désigne le corps des nombres complexes, **R** le corps des nombres réels, **Z** l'ensemble des entiers, **N** l'ensemble des entiers positifs ou nuls. On identifiera **N**, **Z** et **R** à des parties de **C**.

Re(z) désigne la partie réelle du nombre complexe z, Im(z) sa partie imaginaire.

Le mot « fonction » désigne une application définie sur une partie de **C** et à valeurs complexes.

Une fonction F_1 holomorphe sur un ouvert connexe Ω_1 est un prolongement analytique de la fonction F_2 holomorphe sur l'ouvert Ω_2, si Ω_1 contient Ω_2 et si la restriction de F_1 à Ω_2 est F_2.

La fonction F sera dite *régulière et nulle à l'infini* si elle est un prolongement analytique de la somme d'une série $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{w^{s+1}}$ convergente pour $|w|$ assez grand.

Un contour fermé Γ entourant une fois l'ensemble borné E de **C** (en abrégé contour Γ entourant E) est défini par une application continue et dérivable par morceaux $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que l'on ait :

(1) $$\varphi(0) = \varphi(1)$$

(2) $$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = 1 \qquad \text{pour tout } a \in E$$

Une fonction entière est une fonction holomorphe en tout point du plan complexe.

Les résultats énoncés dans les différentes questions de la partie I peuvent éventuellement être appliqués dans le reste du problème sans avoir été démontrés.

I

A. F est une fonction donnée *régulière et nulle à l'infini;* Γ entoure le complémentaire de l'ensemble ouvert où F est définie et holomorphe.

1° Montrer que la fonction :

$$z \longmapsto u(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma F(w)\, e^{wz}\, dw$$

est une fonction entière qui ne dépend pas du contour Γ particulier choisi.

2° On suppose que, pour $|w| > \rho$, $F(w)$ coïncide avec la somme de la série $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{w^{s+1}}$. En choisissant un contour Γ particulier, déterminer le développement de Taylor à l'origine de la fonction u.

Montrer l'inégalité :

$$\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\mathrm{Log}\,|u(z)|}{|z|} \leqslant \rho$$

B. f est une fonction entière donnée autre que la fonction nulle dont le développement de Taylor à l'origine est : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ et qui satisfait à la condition :

$$(\mathscr{C}) \qquad \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\mathrm{Log}\,|f(z)|}{|z|} = r < +\infty$$

1° Montrer l'égalité :

$$\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = r.$$

(On majorera l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$, où Γ est un cercle de rayon convenablement choisi entourant l'origine.)

Déterminer la fonction F *régulière et nulle à l'infini,* holomorphe en dehors du disque $\{ w \in \mathbf{C};\ |w| \leqslant r \}$ et telle que l'on ait :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma F(w)\, e^{wz}\, dw$$

où Γ est un contour entourant le disque $\{ w \in \mathbf{C};\ |w| \leqslant r \}$.

2° R désigne un nombre réel. On pose, θ étant réel,

$$h(\theta, f) = \limsup_{R\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}\,|f(Re^{i\theta})|}{R}$$

Montrer que la fonction :

$$w \longmapsto \int_0^{+\infty} f(xe^{i\theta})\, e^{-wxe^{i\theta}}\, e^{i\theta}\, dx$$

est holomorphe dans le demi-plan $\{ w \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}(we^{i\theta}) > h(\theta, f) \}$ et coïncide avec la fonction F introduite à la question précédente aux points où ces deux fonctions ont été définies.

3° On pose :

$$K_f = \bigcap_{0 \leqslant \theta < 2\pi} \pi_\theta \qquad \text{où} \qquad \pi_\theta = \{ w \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}(we^{i\theta}) \leqslant h(\theta, f) \}.$$

Montrer qu'il existe un prolongement analytique de F au complémentaire de K_f. On appelle encore F ce prolongement analytique.

Établir l'égalité :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma F(w)\, e^{wz}\, dw$$

où Γ est un contour entourant K_f.

4° Montrer que, si K_f est connu, la fonction $\theta \longmapsto h(\theta, f)$ s'en déduit.

Établir que $\theta \longmapsto h(\theta, f)$ est une fonction continue et indiquer une construction géométrique de $h(\theta, f)$ à partir de l'ensemble K_f.

II

On considère dans le plan complexe la bande $\{ w \in \mathbf{C};\ |\mathrm{Im}(w)| < \pi \}$. $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des points de cette bande tels que pour $w \in \mathcal{D}$ on ait : $|e^w - 1| < 1$. On note f une fonction entière satisfaisant à la condition $\mathscr{C}$ de I-B.

1° Déterminer une suite de fonctions polynomiales p_n telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)\,(e^w - 1)^n$ converge vers e^{wz} pour tout $w \in \mathcal{D}$.

(On utilisera la développement de Taylor à l'origine de la fonction $\zeta \longmapsto \Psi(\zeta) = (1+\zeta)^z$ avec $\Psi(0) = 1$.)

Démontrer que la convergence de la série est uniforme pour $(w, z) \in K \times K'$ où K est un compact quelconque de $\mathcal{D}$ et K' un compact quelconque de $\mathbf{C}$.

2° Établir qu'une condition nécessaire et suffisante pour que K_f soit inclus dans $\mathcal{D}$ est :

$$h(\theta, f) < \cos\theta \operatorname{Log}(2\cos\theta) + \theta \sin\theta \qquad \text{pour} \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

3° On suppose : $K_f \subset \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe une suite de nombres complexes α_n et une seule telle que l'on ait pour tout z de $\mathbf{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_n(z).$$

Démontrer que cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$.

(On utilisera les résultats de I-B-3°; on donnera l'expression de α_n en fonction des valeurs que prend f aux points de $\mathbf{N}$.)

En considérant $f(-1)$, établir que, si $f(z)$ appartient à $\mathbf{Z}$ pour tout z de $\mathbf{N}$, f est une fonction polynomiale.

4° On suppose :

$$h\left(\frac{\pi}{2}, f\right) < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad h\left(-\frac{\pi}{2}, f\right) < \frac{\pi}{2}.$$

En désignant par g la fonction $z \longmapsto e^{-cz} f(z)$, où c est un nombre réel, montrer qu'il est possible de choisir c tel qu'on ait : $K_g \subset \mathcal{D}$.

En déduire l'existence d'une suite de nombres complexes β_n tels que l'on ait :

$$f(z) = e^{cz} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n p_n(z)$$

la série du second membre étant uniformément convergente sur tout compact de $\mathbf{C}$.

En déduire que, si f s'annule en tous les points de $\mathbf{N}$, f est la fonction nulle.

III

Dans cette partie, f est une fonction entière satisfaisant pour tout z à la condition :

$$|f(z)| \leqslant B(1 + |z|^k)\, 2^{|z|}$$

où k est un entier positif ou nul et B une constante positive.

On désigne par F la fonction *régulière et nulle à l'infini*, holomorphe en dehors du disque $D = \{w \in \mathbf{C}; |w| \leqslant \operatorname{Log} 2\}$ et telle que l'on ait :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma F(w)\, e^{wz}\, dw$$

où Γ est un contour entourant D.

1° Montrer l'existence d'un nombre positif A tel que l'on ait :

$$|F(w)| \leqslant \frac{A}{[|w| - \operatorname{Log} 2]^{k+1}} \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Log} 2 < |w| \leqslant 1.$$

(On utilisera I-B-2°.)

2° Montrer qu'on peut choisir a réel tel que, si on pose

$$w = \operatorname{Log} 2 + it - \frac{t^2}{a},$$

on ait pour t réel non nul et assez voisin de zéro :

$$|e^w - 1| < 1 \qquad \text{et} \qquad |w| < \operatorname{Log} 2$$

En déduire l'existence d'un contour Γ entourant $D' = D - \{\operatorname{Log} 2\}$, passant par le point Log 2, et tel que pour tout point w de Γ autre que le point Log 2 on ait : $|e^w - 1| < 1$.

Démontrer que, si a satisfait à : $2 \operatorname{Log} 2 < a < 2$, la restriction à $\Gamma - \{\operatorname{Log} 2\}$ de $(e^w - 2)^{2k+3} F(w)$ est une fonction continue qui tend vers 0 quand w tend vers Log 2.

3° Démontrer que, Γ étant le contour de III, 2°, la fonction :

$$X \longmapsto v(X) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{(e^w - 2)^{2k+5} F(w)}{1 - X(e^w - 1)}\, dw$$

est holomorphe et bornée dans le disque $\{X \in \mathbf{C}; |X| < 1\}$.

4° Soit Γ' un contour entourant Γ; montrer que v est un prolongement analytique de la fonction définie au voisinage de 0 par :

$$X \longmapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} \frac{(e^w - 2)^{2k+5} F(w)}{1 - X(e^w - 1)}\, dw.$$

En déduire le développement de Taylor à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n$ de la fonction v, et exprimer v_n à partir des valeurs de f aux points de $\mathbf{N}$.

5° On suppose : $f(z) \in \mathbf{Z}$ pour $z \in \mathbf{N}$. Établir que v est une fonction polynomiale.

Montrer l'existence d'une fonction polynomiale P_1 satisfaisant à l'égalité :

$$\sum_{l=0}^{2k+5} (-1)^l\, 2^{-l} C_{2k+5}^l\, f(z+l) = \sum_{l=0}^{2k+5} (-1)^l\, 2^{-l} C_{2k+5}^l\, P_1(z+l)$$

(C_n^p est le nombre des combinaisons de n objets p à p.)

En déduire l'égalité :

$$f(z) = 2^z P_2(z) + P_1(z)$$

où P_2 est une fonction entière que l'on précisera.

CORRIGÉ

I.A

▶ 1°/ Comme l'indice de tout point de E vaut 1, E est dans une des composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et l'intégrale

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(w)\, e^{wt}\, dw$$

est parfaitement définie. Pour montrer que u est holomorphe entière, on utilise le théorème de Morera (très utile) :

Ici soit Δ un triangle de $\mathbb{C}$, $\partial\Delta \times \Gamma$ est un compact et $(w, z) \longmapsto F(w)\, e^{wz}$ est continue, donc

$$\int_{\partial\Delta} u(z)dz \qquad \text{a un sens ,} \quad u(z) \text{ est continue,}$$

et

$$\int_{\partial\Delta} u(z)dz = \int \left(\int_{\partial\Delta} e^{wz}\, dz \right) \frac{1}{2\pi i}\, F(w)dw$$

Comme $z \longmapsto e^{wz}$ est entière, l'intégrale $\int_{\partial\Delta} e^{wz}\, dz = 0$.

L'indépendance vis à vis de Γ est immédiate en utilisant le théorème de Stokes : $\int_\Gamma \omega - \int_{\Gamma'} \omega = \int_M d\omega$ où M est le compact à bords orientés Γ et Γ'.

▶ 2°/ Le contour Γ sera évidemment $|z| = R$ avec $R > P$. Il est bien connu que si $u(z) = \sum_0^\infty b_n\, z^n$, on a l'expression de b_n sous la forme

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u(z)}{z^{n+1}} dz$$

D'où

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(w)\, \frac{e^{wz}}{z^{n+1}}\, dz\, dw$$

et

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{wz}\, \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{w^n}{n!}$$